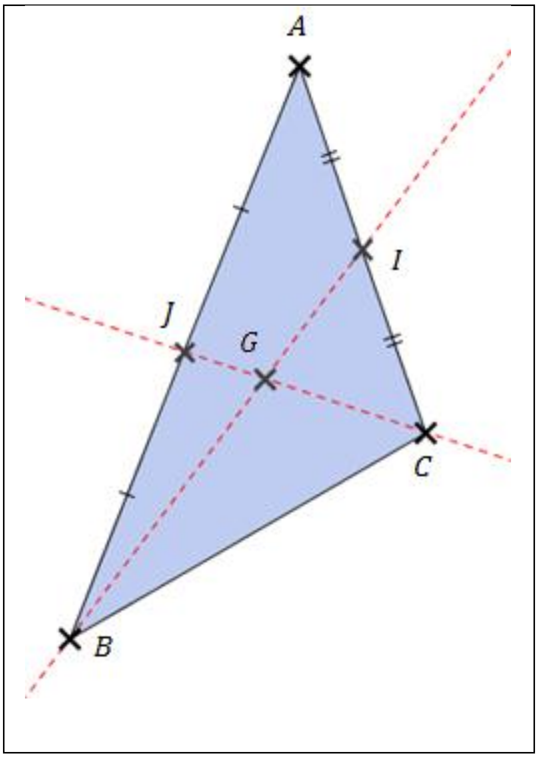
Fiche démonstration : Concours des médianes

Nous avons pu conjecturer que les trois médianes d'un triangle semblaient concourantes.
Cette activité a pour but de valider cette conjecture en effectuant une preuve de ce résultat.

Pour cela, considérons la figure ci-contre, obtenue grâce au programme de tracé suivant :



- Soit ABC un triangle quelconque.
- Soient I et J les milieux des côtés $[AC]$ et $[AB]$.
- Les médianes (BI) et (CJ) se coupent en G.

But : Démontrer que (AG) est la troisième médiane du triangle ABC.

1) Construire le symétrique D de A par rapport à G.

Noter K le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

2) Dans le triangle ABD, pourquoi peut-on affirmer que $(JG) // (BD)$ et $BD = 2\,JG$?

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

3) Que peut-on obtenir d'analogue dans le triangle ADC ?

……………………………………………………………………………………………

4) Quelle est la nature du quadrilatère $BGCD$? Justifiez.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

5) En déduire que (AK) est la troisième médiane du triangle ABC.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

6) Expliquer pourquoi $BG = 2\,GI$, $CG = 2\,GJ$ et $AG = 2\,GK$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

BILAN :

Propriété : Les trois médianes d'un triangle se coupent en ………………………………,
on dit qu'elles sont ………………………………

Le point de concours des médianes d'un triangle est appelé ………………………………

Remarque : Cette appellation prend tout son sens en physique, puisqu'il s'agit de la position d'équilibre du triangle.
Le centre de gravité d'un triangle est situé au $2/3$, à partir du sommet, de chaque segment-médiane.